

## サープラス最適なポートフォリオ構成

田中英治\*

### 概要

近年公表された国内の退職給付会計の基準改定案では、確定給付型企業年金については時価主義をより強める内容になっている。この改定の実現を視野に確定給付型企業年金の運用においてはサープラスの管理が重要な課題となりつつある。本稿は、任意の積立比率の確定給付型企業年金においてサープラスの投資効率性が最適となるポートフォリオ構成を導出する新たな理論的手法を説明する。それは、安全資産とリスク資産を投資対象とした通常の1期間の平均分散アプローチで、特別な仮定を必要としない手法である。あわせて導出構成から得られる年金運用に関するインプリケーションとしてLDIの有効性などについて理論的に考察する。

**キーワード:** 企業年金, 確定給付型, ALM, LDI

### 1 はじめに

近年IFRSとのコンバージェンスが日本の会計基準の大きなテーマとなっているが、その一環で退職給付の会計基準も改定の検討が進められている。特に確定給付型企業年金（以下企業DB）では、予定利率の廃止、年金負債評価の公正化、母体BSの即時認識、など時価反映をより徹底する方向で検討がなされている<sup>1</sup>。この改定案が実現すれば年金の積立状況

の変化がより如実に母体BSへ影響することから、企業DB基金の運用では積立状況を示すサープラスの投資効率性が以前にも増して重要なテーマとなってきた。そこで本稿は、サープラスの投資効率性が最適となるポートフォリオの選択問題を取り上げ、解析的な導出方法の解明を進める。ここで投資効率性は母体企業から分離独立した企業DB基金を投資主体とした場合の1期間リターンを対象に考える。関連する先行研究としてSharpe & Tint[1990]がまずはあげられる。彼らの研究は、任意の積立比率の企業DB基金におけるサープラスの投資効率性を最適とするポートフォリオの選択問題を1期間の平均

---

\* (財)年金シニアプラン総合研究機構

〒108-0074 東京都港区高輪1丁目3番13号

email: e-tanaka@nensoken.or.jp

本稿の内容は所属組織の意見を表明するものではない。

---

<sup>1</sup> 2010年3月公表のASBJ公開草案。本稿では改定案とする。

分散法で定式化した初期の研究として有名である<sup>2</sup>。但し解析解は得られていない。一方、ベンチマーク運用の観点からRoll[1992]は相対効率的なポートフォリオについて研究し、相対有効フロンティアを解析的に導出した。これはSharpe & Tintの問題設定における積立均衡（積立比率1）の場合の解析解と解釈することができる。このRollの研究と同質の内容をGrinold & Kahn[1999]はファクターモデルを使って説明した。彼らはベンチマーク運用における相対効率的なポートフォリオについて、ベンチマークリターンをファクターとしたシングルファクターモデルを用いて説明している。但しRollと同様に積立均衡に相当するケースのみで任意の積立比率に対応していない。近年このファクターモデルを用いるアプローチでWaring はSharpe & Tintと同種の問題を研究している。特にWaring & Whitney [2009]は、任意の積立比率の企業DB基金において年金負債と年金資産のリターンがマルチファクターモデルで表されると仮定して、相対効率的なポートフォリオの構成を解析的に導出した。彼らはその導出解が3種類のポートフォリオから構成されることから3ファンド定理と呼んでいる。このWaring & Whitneyの研究が最も進んだ先行研究と認識しているが、彼らの導出方法には改善の余地があると考えられる。それは年金資産と年金負債のリターンがファクターモデルで表されることを仮定している点で、この仮定により彼らの導出理論には次のような制約が付随してしまっている。

- ・前提や仮定が多いほど理論の特殊性が強まり、モデルの成立に依存した限定的な理論となる。
- ・分散化されていないポートフォリオではスペシフィックの影響が無視できず<sup>3</sup>、導出理論を厳密には適用できない。

---

<sup>2</sup> 以下サープラススペースの視点を「相対」とし、アセットオンリーベースの視点を「絶対」と表現する。

<sup>3</sup> 米澤[2003]は最適化計算へのスペシフィックの影響を説明している。

そこで本稿は、年金資産と年金負債のリターンにファクターモデルの成立を仮定せずに、任意の積立比率の企業DB基金におけるサープラス効率的なポートフォリオの構成（3ファンド定理）を導出する解析的方法を構築する。あわせて、導出される構成から得られる企業DB基金の運用へのインプリケーションとして、LDIのタイプ別の有効性、積立過不足における信用リスクの影響、給付の確実性などについて考察を加える。

## 2 問題設定

任意の積立比率の企業DB基金において1期間の年金負債に対する相対効率が最適となるポートフォリオを平均分散法により求めることを問題とする。基金は母体企業から分離独立した投資主体と捉え<sup>4</sup>、基金の母体企業に対するポジション<sup>5</sup>は無いものとする。投資主体はリスク回避的とするが、効用関数は特定化しない。市場の前提として1つの安全資産と複数のリスク資産がある無裁定な完全市場を仮定する。負債は会計上定義される所与のものとし、負債キャッシュフローはリスク資産に含まれる割引債（金利が負債評価金利と一致する種類）で完全に複製できるものとする。以下この割引債による複製ポートフォリオを負債ポートフォリオと呼ぶ。サープラスのリスク要因<sup>6</sup>は資産リスクと負債リスクの要因に分けられ、負債リスクの要因はさらに評価金利リスクと基礎率リスクの要因に分けることができる。このうち基礎率リスクは運用による効果的なヘッジが困難として除いて考える<sup>7</sup>。

1期間のサープラスリターンはWaring[2004]と同様に次式で定義する。

---

<sup>4</sup> 基金の運用は一義的には基金のために行うがリスク許容度は投資リスクを負担している母体企業に配慮すると考える。同様な考え方は米澤[2003]にも見られる。

<sup>5</sup> 例えば母体企業の基金に対する積立不足分の補填義務や積立超過分の母体企業への還元である。後に考察で言及する。

<sup>6</sup> 制度の見直しなどイレギュラーな変動要因は除く

<sup>7</sup> ヘッジ可能とすれば基礎率リスクを含めた形に本論を拡張することもできる。

$$S = A - L \quad (1-1)$$

$$SR = G \cdot AR - LR \quad (1-2)$$

$$AR = \frac{\Delta A}{A}, \quad LR = \frac{\Delta L}{L}, \quad G = \frac{\bar{A}}{\bar{L}} \quad (1-3)$$

$S$  : サープラス,  $L$  : 年金負債額,  $A$  : 年金資産額,  $SR$  : サープラスリターン,  $LR$  : 年金負債リターン,  $AR$  : 年金資産リターン,  $\bar{A}, \bar{L}$  :  $A$  と  $L$  の期初の確定値,  $G$  : 期初の積立比率

### 3 最適構成の導出

わかりやすさのため、積立比率が1の場合(積立均衡の状態)で最適ポートフォリオの導出を説明した後、任意の積立比率における最適ポートフォリオの導出を説明する。

#### 3.1 積立比率が1の場合

任意の資産リターンは次の2-1式で表すことができ、サープラスリターンは2-2式のように表すことができる。

$$AR = x \cdot (R_p - r) + R_p \quad (2-1)$$

$$SR = x \cdot (R_p - r) + R_p - R_L \quad (2-2)$$

$x$  : レバレッジ比率,  $R$  : 単位期間リターン,  $r$  : 安全資産の利子率, 添字  $P$  : 任意のリスク資産ポートフォリオ, 添字  $L$  : 負債ポートフォリオ

2-2式のサープラスリターンが平均分散の観点で最適となる  $P$  と  $x$  を求めることが目標となる。以下レバレッジ<sup>8</sup>の有無によりポートフォリオを二種類 ( $x > 0$ ,  $x \leq 0$ ) に分けて考えていく。

##### ① レバレッジ有り ( $x > 0$ ) の場合

2-2式を次のように変形する。

$$SR_{x>0} = x \cdot \left\{ R_p + \frac{(R_p - R_L)}{x} - r \right\} \quad (2-3)$$

2-3式で  $R_p - R_L$  の部分は「 $P$ と $L$ のロングショートポジション (以下LSP)」のリターンと解釈でき、 $R_p + (R_p - R_L)/x$  は  $P$  に「 $P$ と $L$ のLSP」を  $1/x$  単位

加えたポートフォリオのリターンと解釈できる<sup>9</sup>。このポートフォリオを  $P'$  とすれば、2-3式は次の形に改めることができる。

$$SR_{x>0} = x \cdot (R_{P'} - r) \quad (2-4)$$

$$\text{ここに, } R_{P'} = R_p + (R_p - R_L)/x \quad (2-5)$$

サープラスリターンの期待値を  $\alpha$  とし、サープラスリターンの標準偏差を  $\omega$  とすると、 $\alpha/\omega$  はインフォメーションレシオ (以下  $IR$ ) を意味し、次式で算出される。

$$IR_{x>0} = \frac{\mu_{P'} - r}{\sigma_{P'}} \quad (2-6)$$

$\mu$  :  $R$  の期待値,  $\sigma$  :  $R$  の標準偏差

2-6式はアセットオンリーにおけるシャープレシオ (以下SP) を表す形になっており、 $IR_{x>0}$  はSPの最大値を超えることはないことがわかる。SPの最大値は図1でわかるとおりアセットオンリーの有効フロンティア上にある接点ポートフォリオ  $T$  のSPであることから、 $IR_{x>0}$  は次の不等式を満たす<sup>10</sup>。

$$SP_T = \frac{\mu_T - r}{\sigma_T} \geq IR_{x>0} \quad (2-7)$$

等号が成立するのは  $P'$  が  $T$  の時だが、 $P'$  が  $T$  である場合2-5式は次の2-8式となり、この式を  $R_p$  について整理すると2-9式となる。

$$R_T = R_p + (R_p - R_L)/x \quad (2-8)$$

$$R_p = \frac{1}{1+x} \cdot R_L + \frac{x}{1+x} \cdot R_T \quad (2-9)$$

つまり、 $P$  が  $L$  と  $T$  を1対  $x$  の比で合成したポートフォリオであれば2-7式の等号が成立し、 $IR_{x>0}$  の最大値は  $SP_T$  となる。図2のように  $\omega$ - $\alpha$  平面で考えた場合、 $IR_{x>0}$  を最大にするポートフォリオを示す点は原点を通る傾き  $SP_T$  の直線  $m$  上にあり、この直線  $m$  は  $\omega$ - $\alpha$  平面においてサープラスの有効フロンティア

<sup>9</sup> LSPは追加資金無しに任意のポートフォリオに加えることができる。

<sup>10</sup> 接点ポートフォリオ  $T$  が存在し、 $T$  のSPは正の値とする。

<sup>8</sup> 本稿では現金 (安全資産) ショートの意味で用いる。

となっている。なぜなら、任意のポートフォリオを示す点はすべてこの直線mより下の領域 ( $\alpha \leq SP_T \cdot \omega$ ) にあり、任意の  $\alpha$  において最小の  $\omega$  となるポートフォリオを示す点は直線m上にあるからである。最適なポートフォリオはこのサープラス有効フロンティア上に存在し、例えば期待効用の無差別曲線との接点として見出されることになる。2-9 式を 2-1 式と 2-2 式に入れると次式を得る。

$$SR_E = x \cdot (R_T - r) \quad (2-10)$$

$$AR_E = x \cdot (R_T - r) + R_L \quad (2-11)$$

$$IR_E = SP_T = \frac{\mu_T - r}{\sigma_T} \quad (2-12)$$

添字 E: サープラス有効フロンティア上のポートフォリオ

## ② レバレッジ無し ( $x \leq 0$ ) の場合

レバレッジを使わない場合、レバレッジを使う場合のサープラス有効フロンティアより効率的になりえるかが問題となるが、結論としてはなりえない (この証明は付録に記す)。

以上、①②より①のサープラスの有効フロンティアが最も効率的であり、その有効フロンティア上にある最適なポートフォリオは次のような構成となる。但し、単位は負債額基準で、接点ポートフォリオの構築にはレバレッジを用いる。

- ・負債ポートフォリオ : 1 単位
- ・接点ポートフォリオ :  $x$  単位 ( $x > 0$ )

図1  $\sigma - \mu$  平面図 1

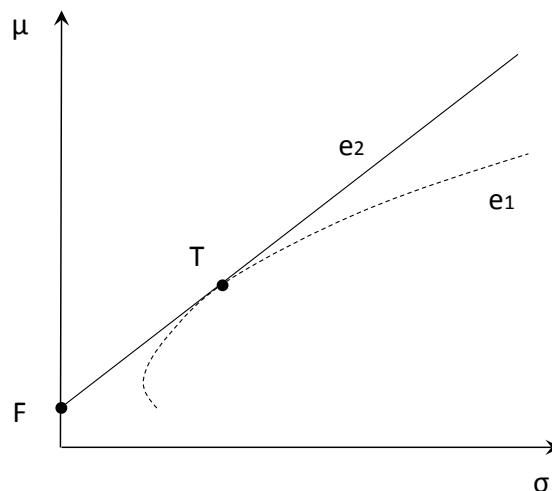


図1注) F:安全資産, T:接点ポートフォリオ, e1:リスク資産のみの有効フロンティア, e2:有効フロンティア

図2  $\omega - \alpha$  平面図 1

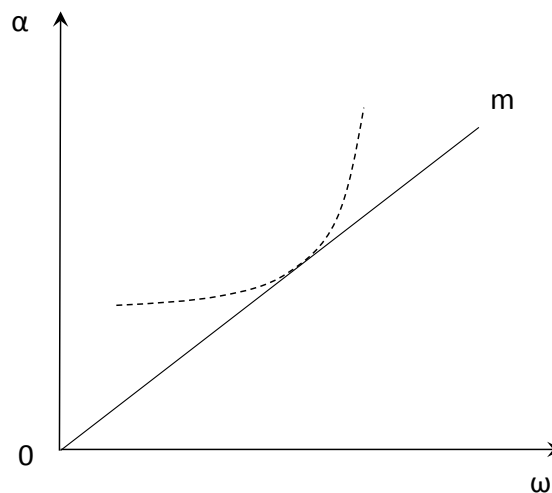


図2注) m:サープラス有効フロンティア

### 3.2 任意の積立比率の場合

任意の積立比率におけるサープラスリターンは次式で表される。

$$\begin{aligned} SR &= G \cdot AR - LR \\ &= G \cdot \{x \cdot (R_p - r) + R_p\} - R_L \\ &= (G-1) \cdot r + (G \cdot x + G - 1) \cdot (R_p - r) + R_p - R_L \end{aligned} \quad (3-1)$$

ここで、 $(G \cdot x + G - 1)$ を  $y$  に置き直すと次のようになる。

$$SR = (G-1) \cdot r + y \cdot (R_p - r) + R_p - R_L \quad (3-2)$$

3-2 式は  $(G-1) \cdot r$  の項以外は 2-2 式と同じ形になっている。 $(G-1) \cdot r$  は定数項で最適解の導出には影響しないことから 2-2 式と同様に考えることができ、最終的に一般形として次式を得る。

$$AR_E = (G-1) \cdot r + y \cdot (R_T - r) + R_L \quad (3-3)$$

$$SR_E = (G-1) \cdot r + y \cdot (R_T - r) \quad (3-4)$$

よって、任意の積立比率  $G$  における最適ポートフォリオの構成は次のようになる（単位等は先述と同様）。

|            |                      |
|------------|----------------------|
| ・負債ポートフォリオ | ： 1 単位               |
| ・接点ポートフォリオ | ： $y$ 単位 ( $y > 0$ ) |
| ・現金（安全資産）  | ： $G-1$ 単位           |

## 4 考察

### 4.1 本導出の意義

導出した任意の積立比率の企業 DB 基金におけるサープラス最適なポートフォリオの構成について確認すると次のような特徴があげられる。

- ① 負債ポートフォリオ、接点ポートフォリオ、現金（安全資産）から構成される。
- ② 負債ポートフォリオの保有額は負債と同額になる。
- ③ 接点ポートフォリオの保有にはレバレッジを利用し、保有比率は投資家のリスク許容度による。

- ④ 現金（安全資産）の保有額は積立過不足と同額になる（不足の場合は借入）。

先述したように既に Waring & Whitney[2009]がこの導出結果を得ていて3ファンド定理と呼んでいるが、本論は負債や資産のリターンを説明するファクターモデルの成立を必要としていない点で彼らとは導出方法が異なり、ファクターモデルの仮定に伴う制約が無い。本論により、絶対効率性の最適ポートフォリオ選択における分離定理と同様に、相対効率性の最適ポートフォリオ選択でも普遍的に成立する分離定理（3ファンド定理）が存在することを示すことができたと考えている。

本論では接点ポートフォリオへの投資量と積立水準（拋出の調整）の最適決定については触れていないが、この問題は多期間の問題を扱う動学的アプローチにより研究されるテーマである。一般に企業DBの運営戦略には拋出と運用があり、1期間モデルが運用だけを研究対象とするのに対して動学的アプローチは拋出と運用の両方を対象にする。よって、動学的アプローチの先行研究においても効率的運用に関する成果が得られている。しかし、動学的アプローチの理論展開では一般に効用関数（評価関数）を用いるが、次のような相対的リスク回避型の効用関数ではサープラス（S）が正の状況しか扱えないという問題が指摘（例えば内山[2005]）されており、積立不足を含めたサープラス最適なポートフォリオ構成は導出されていない<sup>11</sup>。

$$U(S) = \frac{S^{1-\gamma}}{1-\gamma} \quad (0 < \gamma < 1) \quad (4-1)$$

逆に本論で得られた最適なポートフォリオ構成を動学的アプローチに組み込むことで、残された投資量と積立水準（拋出の調整）の最適決定の問題の研究に資することができるかもしれない。

<sup>11</sup> この問題を避けるためサープラスリターンではなく積立比率リターンで最適ポートフォリオを求める方法もあるが、米澤[2003]が指摘するように積立比率リターンは積立比率に依存しないため、積立比率の影響を見ることはできない。

## 4.2 積立過不足の影響

図3に $\omega$ - $\alpha$ 平面における積立状態別のサープラスの有効フロンティアを示した。積立均衡のフロンティアは原点を通る傾きが $SP_T$ の直線となり、積立超過と積立不足は同じ傾きで $\alpha$ 方向に $(G-1) \cdot r$ だけシフトした直線となる。これが基金の投資に対する母体企業の負担を考慮に入れない場合のサープラス有効フロンティアである。ここで、基金の母体企業に対するポジションを追加的に考えてみる。前提として、積立不足は母体企業に補填義務があり、積立超過は将来の掛金負担の軽減により母体企業に還元されるものとする<sup>12</sup>。この場合、積立不足分は1期間の母体企業への貸付金で、積立超過は逆に同様な借入金と見ることができ、これらは最適ポートフォリオの現金のポジションを埋め合わせる形になる。つまり、母体企業に対するポジションを考慮すると積立超過と積立不足のフロンティアは積立均衡のフロンティアに一致することになる<sup>13</sup>。但し、母体企業の信用リスクの存在を意識するならば、積立不足については最適ポートフォリオの構成に追加ポジションが必要となる。母体企業への貸付金は母体企業の社債（満期は1期間後）の保有と見なせるが、この社債に付随する信用リスクへの投資は明らかにポートフォリオの最適性の点で不要である。よって、基金には母体企業の社債をショートして現金を得るポジション<sup>14</sup>が追加が必要となる。母体企業側から見ると、社債ショートが無ければ基金に対する借入金の金利は信用リスクを反映していない低い金利となり、市場で信用リスクを反映した高い金利で資金調達をして基金の積立不足を埋めるより金利負担の点で有利になる。それに対して社債ショートがある場合は、基金に対する借入金の金利も信用リスクを反映した高い金利となるため、市場調達による積立不足の補填と金利負担の点では無差別になる。よって、もし母

体企業に信用リスクがある状態で積立不足のある基金が母体企業の信用リスクをヘッジしないならば、母体企業には金利負担の点では基金に対して借入の状態（積立不足の状態）を選ぶインセンティブがあると考えられる<sup>15</sup>。この点、基金への積立を一定以上に促す規制には、母体企業が無制限に基金への借入を拡大することを防ぎ、信用リスクを遮断する意味で効果があることが確認できる。

図3  $\omega$ - $\alpha$ 平面図2

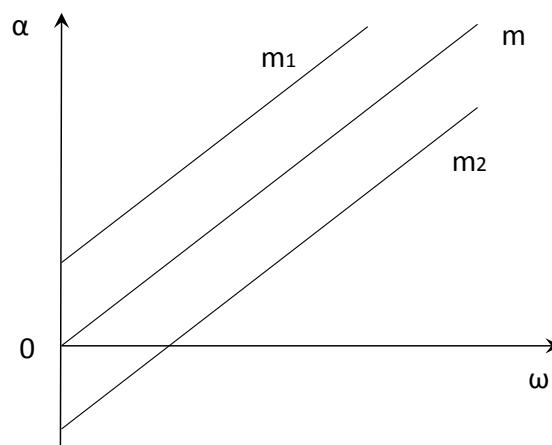


図3注) m1, m 2: 積立過不足のサープラス有効フロンティア

## 4.3 分離管理の有効性

導出した最適ポートフォリオの構成からポートフォリオの管理は二つに分けて独立に考えることが有効であることがわかる。二つとは、負債ポートフォリオを保有する「負債ヘッジ」部分とリスク資産を保有する対負債の「超過収益追求」部分である<sup>16</sup>。これはLDIに通じるポートフォリオの管理手法であり、LDIは相対効率性の点で理論的に有効な特徴を有する手法であると考えられる。一般にLDIはヘッジを意識した運用手法といった広い意味で現在使

<sup>12</sup> 大森・米澤[2009]も同じ仮定を置いている。

<sup>13</sup> 問題設定の前提に同様な基金の母体企業に対するポジションを考慮するならば、積立過不足はそもそも存在しないことになる。

<sup>14</sup> 母体企業のCDS（満期は1期間後）の購入に相当する。

<sup>15</sup> より実務的には税金等も考慮する必要がある。税金を考慮する場合は節税と金利負担軽減の大小が問題となり、節税<金利負担軽減だとインセンティブ有り、逆の場合は無しとなる。

<sup>16</sup> 積立過不足により現金（または借入金）の部分が生じるが、リスク資産の管理では二つの部分である。

われているが、提案され始めた当初の原型はレバレッジを利用してオーバーレイの形で負債のフルヘッジを行う運用手法であった。この原型LDIは「レバレッジ利用」と「負債フルヘッジ」の点でサープラス最適な構成の特徴を持つ<sup>17</sup>。レバレッジを利用するLDIをType1とし、利用しないLDIをType2とすると、積立均衡では図4のように $\omega$ - $\alpha$ 平面上においてType1は直線m上に、Type2は直線n上に存在する。直線nはレバレッジを使わない場合のサープラス有効フロンティアである。Roll[1992]は、リスク資産のみのサープラス有効フロンティアが $\omega$ - $\alpha$ 平面では原点を通る直線（図4のn）となり、この直線の傾きはベンチマーク（ここでは負債）によらないことを示した。付録の補論から直線mの傾きは直線nの傾きより大きいことが示されており、LDIはType2よりType1の方が効率的であることがわかる。このことは同時に相対効率的な運用にはレバレッジの利用が重要であることも示している。ちなみに直線mと直線nの傾きが共に負債（ベンチマーク）によらない点は興味深い。

また、「負債ヘッジ」部分では基金固有の負債に連動した投資成果を目標とするパッシブ運用が基本となり、「超過収益追求」部分では負債とは無関係に絶対リターン型<sup>18</sup>での絶対効率性を追求した運用となる。この「超過収益追求」部分ではレバレッジコストを超える収益が求められるが、レバレッジコスト率は短期金利であって負債コスト率<sup>19</sup>より一般に低いと考えられるので、負債を時価評価せずに負債コストを目標として運用する場合と比較すると、「超過収益追求」部分の運用に要求されるハードルは軽減されることになる。

17 「負債ヘッジ」部分をすべてレバレッジ構築する形は必ずしもサープラス効率的ではない。ただ、実務上レバレッジを作り出すのは資産のどの部分であってもよく、作り出しやすいのはSiegel[2010]が指摘するように債券部分であろう。

18 レバレッジコストが課されるアセットオンリーの運用と見ることできる。

19 負債コストは勤務費用を除いた1期間の金利費用とする。負債コスト率は負債ポートフォリオの利回りと考えることができ、一般に順イールドでは短期金利より大きくなる。

図4  $\omega$ - $\alpha$ 平面図3

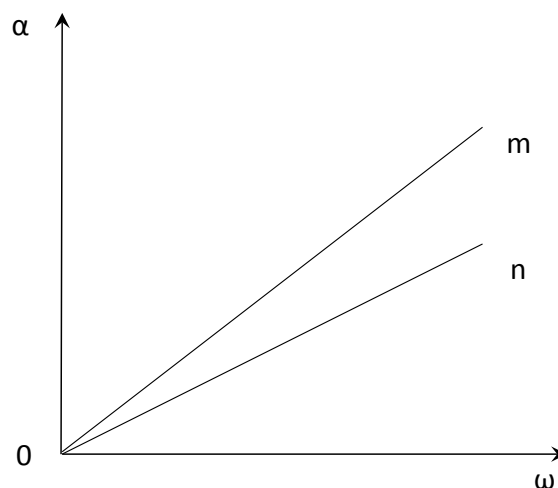


図4注) n:リスク資産のみのサープラス有効フロンティア

#### 4.4 効率性と確実性

サープラスの有効フロンティアとアセットオンリーの有効フロンティアを $\sigma$ - $\mu$ 平面に描くと図4のようになる<sup>20</sup>。この図から絶対効率性の観点ではサープラスの有効フロンティアはアセットオンリーの有効フロンティアより劣ることが確認できるが、この劣化は負債に対する連動性を得ることの代償を表している<sup>21</sup>。負債ポートフォリオは負債キャッシュフローを正確に実現するので、1期間の連動性は同時に給付<sup>22</sup>の確実性を意味する。つまり、給付の確実性を得る代償として絶対効率性が劣化していると解釈できる。年金では一般に運用の絶対効率性だけでなく給付の確実性も重要であり、この両方の観点を内包した相対効率性で年金の投資効率性は評価する方が絶対効率性だけで評価するより適切であろう。ちなみに給付の確実性の質は負債の評価金利の信用度によって変化し、その信用度が低くなれば確実性の質は低くなる。保有する負債ポートフォリオの信用度は

20  $\sigma$ - $\mu$ 平面におけるサープラスの有効フロンティアはアセットオンリーの有効フロンティアが漸近線の双曲線となる。

21 安全資産を含まないケースでRoll[1992]が同様な劣化を指摘している。

22 正確には年金給付のうち既に会計上確定した部分の給付。

評価金利の信用度と一致するので、評価金利の信用度が下がれば保有資産の信用度も下がる。もし、母体企業より低い信用度で評価するならば、基金に資金を積立てることがかえって給付の確実性の質を劣化させることになり、基金の分離独立の趣旨に反する。負債評価に用いる金利に関する議論ではこのような点にも注意が必要であろう<sup>23</sup>。

図5  $\sigma-\mu$  平面図2

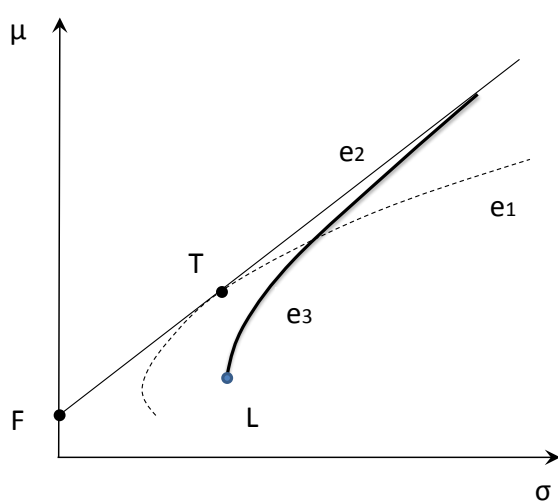


図5注) e3:  $\sigma-\mu$  平面におけるサブリラス有効フロンティア

## 5 おわりに

企業年金の会計基準改定への対応として年金制度を変更することも考えられるが、まずは制度を維持した運用方法の見直しによる対応を検討することが大切であろう。また、改定案は基金および母体BSに透明性を求める内容になっているが、基金運営者は運用の合理性をよく理解して説明責任に備える必要があるだろう。現在、会計基準の改定はまだ確定していないが、改定内容の検討においては運用の観点も重要であろう。企業DBに関係される方々に本稿がなんらかの参考となれば幸いである。

<sup>23</sup> 会計基準では信用度の高い債券の金利を用いるとの幅のある規定になっているが、浅野ら[2006]は理論的には信用リスクの無い債券(国債)の金利を用いるべきとしている。



## 付録 一 補論

レバレッジを使わない場合、レバレッジを使う場合のサープラス有効フロンティアより効率的になりえないことの証明を以下に示す。

①  $x=0$  の場合

2-2 式のサープラスリターンは次のように「P と L の LSP」のリターンとして表される。

$$SR_{x=0} = R_P - R_L = R_{LSP} \quad (A-1)$$

以下、 $IR_{LSP} < IR_E$  であることを背理法により示す。ここで  $P=L$  のケースは  $IR$  が定義できない特異な状態なので除いて考える。

(I)  $IR_{LSP} \geq IR_E$  なる LSP が存在すると仮定する。

$$IR_{LSP} = \frac{\mu_{LSP}}{\sigma_{LSP}} \geq \frac{\mu_T - r}{\sigma_T} = IR_E \quad (A-2)$$

(II) 接点ポートフォリオ T に A-2 式を満たす LSP を 1 単位加えたポートフォリオを Q とするとポートフォリオ Q の SP は次式で算出される。

$$SP_Q = \frac{\mu_{LSP} + (\mu_T - r)}{\sqrt{\sigma_{LSP}^2 + \sigma_T^2 + 2 \cdot \rho \cdot \sigma_{LSP} \cdot \sigma_T}} \quad (A-3)$$

$\rho$  : LSP と T のリターンの相関

一般に、 $\frac{b}{a} \geq \frac{d}{c}$ ,  $a > 0$ ,  $c > 0$  のとき  $\frac{b+d}{a+c} \geq \frac{d}{c}$  なので、 $\frac{b}{a} = \frac{\mu_{LSP}}{\sigma_{LSP}}$ ,  $\frac{d}{c} = \frac{\mu_T - r}{\sigma_T}$  とおくと次の不等式を得る。

$$SP_Q \geq \frac{\mu_{LSP} + (\mu_T - r)}{\sigma_{LSP} + \sigma_T} \geq \frac{\mu_T - r}{\sigma_T} = SP_T \quad (A-4)$$

A-4 式はポートフォリオ Q の SP が接点ポートフォリオ T の SP より小さくないことを示しているが、これは接点ポートフォリオ T が唯一最大の SP になることと矛盾する。よって仮定 I は偽である。

(I) (II) より  $IR_{LSP} < IR_E$  であり、 $IR_{x=0} < IR_E$  である。

②  $x < 0$  の場合

2-4 式からサープラスリターンおよび  $IR_{x<0}$  は次のようになる。

$$SR_{x<0} = -x(r - R_{P'}) \quad (A-5)$$

$$IR_{x<0} = \frac{r - \mu_{P'}}{\sigma_{P'}} \quad (A-6)$$

ここで補論①の導出不等式である  $IR_{LSP} < IR_E$  は任意の LSP で成立することから、「T と P' の LSP (LSP' とする)」について次の不等式が成立する。

$$IR_E = \frac{\mu_T - r}{\sigma_T} > IR_{LSP'} = \frac{\mu_T - \mu_{P'}}{\sqrt{\sigma_T^2 + \sigma_{P'}^2 - 2 \cdot \rho' \cdot \sigma_T \cdot \sigma_{P'}}} \geq \frac{\mu_T - \mu_{P'}}{\sigma_T + \sigma_{P'}} \quad (A-7)$$

$\rho'$  : T と P' のリターンの相関

一般に、 $\frac{b}{a} > \frac{d}{c}$ ,  $c > a > 0$  のとき  $\frac{d}{c} > \frac{d-b}{c-a}$  なので、

$\frac{b}{a} = \frac{\mu_T - r}{\sigma_T}$ ,  $\frac{d}{c} = \frac{\mu_T - \mu_{P'}}{\sigma_T + \sigma_{P'}}$  とおくと次の不等式を得る。

$$IR_E = \frac{\mu_T - r}{\sigma_T} > IR_{LSP'} \geq \frac{\mu_T - \mu_{P'}}{\sigma_T + \sigma_{P'}} > \frac{r - \mu_{P'}}{\sigma_{P'}} = IR_{x<0} \quad (A-8)$$

よって、 $IR_{x<0} < IR_E$  である。

## 参考文献

- [1] 浅野幸弘・岩本純一・矢野学[2006], 『年金とファイナンス』, 朝倉書店
- [2] 大森孝造・米澤康博[2009], 「確定給付企業年金の運営政策」, 『日本保険・年金リスク学会誌』, Vol. 4, No. 1, 29-43 頁.
- [3] 内山朋規[2005], 「負債を完全にヘッジできない場合の確定給付年金の動的最適ポートフォリオ」, 『日本保険・年金リスク学会誌』, Vol. 1, No. 1, 23-43 頁.
- [4] 米澤康博(監修)・三井アセット信託銀行年金運用研究会(著)[2003], 『年金運用と債券投資戦略』, 東洋経済新報社
- [5] 米澤康博[2006], 「新しい年金資産運用理論」, 『年金と経済』 24 (4).
- [6] Grinold, Richard C., and Ronald N. Kahn[1999], Active Portfolio Management, McGraw-Hill.
- [7] Roll, Richard[1992], “A mean / variance analysis of tracking error,” The Journal of Portfolio Management, Vol. 18, No. 4, pp. 13-22
- [8] Sharpe, William F. and Lawrence G. Tint[1990], “Liabilities – A New Approach,” The Journal of Portfolio Management, Vol. 16, No. 2, pp. 4-10.
- [9] Siegel, B. Laurence [2010], “First, Let’s Kill All the Liabilities,” The Journal of Portfolio Management, Vol. 37, No. 1, pp. 1-4
- [10] Waring, M. Barton [2004], “Liability – Relative Investing II,” The Journal of Portfolio Management, Vol. 31, No. 1, pp. 40-53
- [11] Waring, M. Barton and Whitney Duane[2009], “An Asset-Liability Version of the Capital Asset Pricing Model with a Multi-Period Two-Fund Theorem,” The Journal of Portfolio Management, Vol. 35, No. 4, pp. 111-130